РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ НЕРАВНОВЕСНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В КАЗАНСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Ю.М.Молокович

Казанский государственный университет
420008, Казань, ул. Кремлевская, 18

1. Для описания движения однородной жидкости в пористой среде используют различные модели фильтрации в зависимости от целей исследования. Одна из простейших таких моделей, предложенная В.Н.Щелкачёвым [1], исходит из следующих предпосылок: жидкость считается капельной, пористая среда – слабосжимаемой , а закон фильтрации – линейным. Фильтрация по модели Щелкачёва описывается следующей системой уравнений:

$$\vec{w} = -\frac{k}{\mu}\operatorname{grad} p, \tag{1}$$

$$\rho_0 \operatorname{div}\vec{w} + \frac{\partial (m\rho)}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta(p - p_0), \tag{3}$$

которая сводится к уравнению пьезопроводности вида

$$\kappa \nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{4}$$

Здесь $\vec{w}$ – скорость фильтрации, k – коэффициент проницаемости, μ – коэффициент вязкости, p – давление, $m\rho$ – количество жидкости в элементарном объёме, m – коэффициент пористости, ρ – плотность жидкости, $\beta = \beta_c + m_0\beta_ж$, β_c, $\beta_ж$ – соответственно коэффициенты упругоёмкости пласта, сжимаемости пористой среды, сжимаемости жидкости, $\kappa = k/\mu\beta$ – коэффициент пьезопроводности.

Замечание. Во-первых, уравнение (4) относится к параболическому типу, описывающему нестационарные процессы с бесконечной скоростью распространения возмущений ($V_0 = \infty$). Во-вторых, при постановках краевых задач для этого уравнения допустимо рассогласование граничных условий с начальными, взятыми на этих границах. В-третьих, данная модель удовлетворительно моделируется пучком эластичных капилляров одного диаметра.

2. Модель Щелкачёва, как и любая модель, имеет ограниченную область применимости, в пределах которой она даёт весьма удовлетворительные результаты, согласующиеся с экспериментальными данными, полученными в производственных условиях. Однако кривые восстановления давления на забоях скважин, обработанные в полулогарифмических координатах, показывают, что они в области начальных времён (и близким к ним) не соответствуют прямолинейной зависимости, следующей из модели Щелкачёва, т. е. эти временные рамки выходят за пределы её применимости. Этот факт, в частности, подтверждён исследованиями Н.Н.Непримерова [2], проведёнными на большом числе скважин (как нефтяных, так и водяных) ряда месторождений. Результаты этих тщательных экспериментов, полученных с помощью уникальной по точности измерительной техники, и стали исходным пунктом в развитии исследований по неравновесной (релаксационной) фильтрации в Казанском университете [3].

Соотношения (1) и (3) являются равновесными в том смысле, что при изменении одной из величин на конечную (например, скорости фильтрации в равенстве (1)) мгновенно и пропорционально изменяется и другая (градиент давления). Такое равновесное соответствие не всегда соблюдается в начальные моменты времени, особенно при резких изменениях одной из величин. При этом наблюдается эффект запаздывания (релаксации), который продолжается определённое время, необходимое для перехода из бывшего равновесного состояния в новое. Таким образом, нестационарную фильтрацию, особенно в последующие моменты времени за резким (скачкообразным) изменением одной из величин в соотношениях (1) или (3) можно отнести к неравновесным процессам, аналогичным тем, которые изучаются в теории вязкоупругости (см., например, [4–6]).

Отметим, что при фильтрации капельной жидкости в однородной слабосжимаемой пористой среде имеются два независимых друг от друга механизма неравновесности, один из которых характеризует запаздывание в линейном законе фильтрации, а другой – в поведении количества жидкости в элементарном объёме. В простейшем случае неравновесный закон фильтрации и релаксационное поведение количества жидкости в элементарном объёме можно описать следующими соотношениями:

$$\vec{w}=-\frac{k}{\mu}\frac{\tau_p}{\tau_w}\operatorname{grad}p-\frac{k}{\mu}\left(1-\frac{\tau_p}{\tau_w}\right)\int_0^t \operatorname{grad}p\exp\left(\frac{t-t'}{\tau_w}\right)\frac{dt'}{\tau_w}, \tag{5}$$

$$m\rho-m_0\rho_0=\rho_0\beta\frac{\theta_p}{\theta_m}(p-p_0)+\rho_0\beta\left(1-\frac{\theta_p}{\theta_m}\right)\int_0^t (p-p_0)\ \exp\left(\frac{t-t'}{\theta_m}\right)\frac{dt'}{\theta_m}; \tag{6}$$

здесь τ_p, τ_w, θ_p, θ_m – постоянные размерности времени, обусловленные соответствующими релаксационными процессами.

Используя принципы детерминизма, локального действия, суперпозиции и затухающей памяти, применяемые во многих разделах механики сплошных сред, Ю.М.Молокович и П.П.Осипов. в работе [7] ввели и изучили модели неравновесной фильтрации с общими ядрами релаксации. В ней, в частности, исследуются корректность постановок краевых задач, условия возникновения поверхностей разрывав основных гидродинамических параметров, перемещение этих поверхностей и поведение на них скачков давления, скорости фильтрации и количества жидкости в элементарном объёме. А.В.Костериным в работе [8] методами теории необратимых процессов установлен общий вид закона линейной релаксационной фильтрации. Предполагается, что релаксация связана с образованием надмолекулярных структур, которые определяются составом и свойствами жидкости, геометрией поровых каналов и физико-химическим взаимодействием жидкости с твёрдой фазой. Указаны также ограничения, налагаемые термодинамикой на времена релаксации.

3. Результаты тщательных исследований неравновесной фильтрации позволили сделать вывод о том, что она обладает рядом характерных особенностей по сравнению с равновесной. Выделим эти особенности, рассмотрев (для простоты) оба механизма неравновесности по отдельности.

Пусть в первоначально невозмущённом пласте фильтрационное течение жидкости описывается системой уравнений (5), (2), (3). Легко показать, что этой системе соответствует следующее уравнение

$$\kappa\frac{\tau_p}{\tau_w}\nabla^2 p+\kappa\ \left(1+\frac{\tau_p}{\tau_w}\right)\ \int_0^t \nabla^2 p\ \ \exp\left(\frac{t-t'}{\tau_w}\right)\frac{dt'}{\tau_w}=\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{7}$$

Очевидно, в начальные моменты времени ($t \sim 0$) интегральными членами в неравновесном законе фильтрации (5) и уравнении (7) можно пренебречь ввиду их малости по сравнению с остальными членами и записать их соответственно так:

$$\vec{w} = -\frac{k}{\mu}\frac{\tau_p}{\tau_w}\operatorname{grad} p, \tag{8}$$

$$\kappa\frac{\tau_p}{\tau_w}\nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{9}$$

Из соотношений (8) и (9) следует, что в начальные моменты времени фильтрация в пласте осуществляется по модели Щелкачёва с коэффициентами проницаемости и пьезопроводности соответственно равными $k\tau_p/\tau_w$, $\kappa\tau_p/\tau_w$. Эти коэффициенты будем называть динамическими. При этом фильтрационные возмущения распространяются с бесконечно большой скоростью; следовательно, вся рассматриваемая область охватывается фильтрацией. В постановках краевых задач допустимо рассогласование граничных условий с начальными. Далее, по прошествии времени ($t \sim \infty$), необходимого для прихода системы в новое равновесное состояние, закон фильтрации (5) и уравнение (7) соответственно принимают вид (1) и (4), что согласуется с принципом затухающей памяти. В этом случае коэффициенты проницаемости и пьезопроводности будем называть статическими. Таким образом, в процессе фильтрации происходит непрерывное изменение коэффициентов проницаемости и пьезопроводности от динамических величин к статическим.

Выделим особо случай, когда динамический коэффициент проницаемости пренебрежимо мал по сравнению со статическим ($k_{din} = k_{st}\tau_p/\tau_w \cong 0,\ \tau_p = 0$). Нетрудно показать, что в этом случае закон фильтрации приводится к виду

$$\tau_w\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{w} = -\frac{k}{\mu}\operatorname{grad} p, \tag{10}$$

а уравнение (7) запишется так:

$$\kappa\ \nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t} + \tau_w\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \tag{11}$$

Из полученных результатов следует, что во-первых, в начальные моменты времени фильтрация жидкости встречает огромное сопротивление, для преодоления которого требуется определённое время, характеризуемое константой релаксации τ_w. Во-вторых, уравнение (11) относится к гиперболическому типу, описывающему нестационарные процессы с конечной скоростью распространения возмущений ($V_0 = \sqrt{\kappa/\tau_w} < \infty$). В-третьих, при скачкообразном изменении условий, формирующих фильтрационное течение, в рассматриваемой области возникают поверхности разрыва скорости фильтрации и давления, на которых их скачки связаны следующим соотношением

$$[w] = \frac{k}{\mu}\frac{[p]}{\sqrt{\kappa\tau_w}} = [p]\beta\sqrt{\kappa/\tau_w} \tag{12}$$

и затухают по экспоненциальному закону.

Аналогичный закон фильтрации был предложен С.А.Христиановичем, который исходил из следующих соображений. Так как большинство коллекторов имеет сложное строение, то их было предложено моделировать не пучком капилляров одного диаметра, а пучком капилляров с периодическими расширениями и сужениями. В такой среде, наряду с силой трения, пропорциональной скорости фильтрации, будет ещё действовать так называемая "выталкивающая" сила, пропорциональная (по Христиановичу) градиенту давления. Коэффициент проницаемости таких сред определяется проницаемостью частей капилляров меньшего диаметра.

Итак, нерегулярность в строении реальной пористой среды приводит к закону фильтрации типа (10). И наоборот, регуляризация строения реальной пористой среды приводит к неравновесному закону фильтрации с нулевым значением динамического коэффициента проницаемости.

4. Пусть теперь фильтрационное течение описывается системой уравнений (1), (2), (6), которая легко сводится к следующему уравнению

$$\kappa\theta_m\nabla^2 p + \left(1-\frac{\theta_p}{\theta_m}\right)\int_0^t (p-p_0)\,\exp\left(\frac{t-t'}{\theta_m}\right)\frac{dt'}{\theta_m} = \left(1-\frac{\theta_p}{\theta_m}\right)(p-p_0) + \theta_p\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{13}$$

Пренебрегая в начальные моменты времени ($t \sim 0$) интегральными членами в соотношении (6) и уравнении (13), а также в уравнении (13) первым слагаемым по сравнению со вторым, соответственно получим

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta\frac{\theta_p}{\theta_m}(p - p_0), \tag{14}$$

$$\kappa\frac{\theta_m}{\theta_p}\nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{15}$$

Здесь, как и в предыдущем случае, имеют место динамические коэффициенты упругоёмкости ($\beta_{din} = \beta_{st}\theta_p/\theta_m$) и пьезопроводности ($\kappa_{din} = \kappa_{st}\theta_m/\theta_p$). Скорость распространения фильтрационных возмущений также бесконечно большая, и фильтрация мгновенно охватывает всю рассматриваемую область. При больших временах ($t \sim \infty$), в соответствии с принципом затухающей памяти, соотношение (6) и уравнение (13) принимают соответственно вид (3) и (4).

Выделим также случай, когда динамический коэффициент упругоёмкости пренебрежимо мал по сравнению со статическим ($\beta_{din} = \beta_{st}\theta_p/\theta_m \cong 0,\ \theta_p = 0$). В этом случае соотношение (6) и уравнение (13) соответственно принимают вид:

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta\int_0^t (p - p_0)\ \exp\left(\frac{t - t'}{\theta_m}\right)\frac{dt'}{\theta_m}, \tag{16}$$

$$\kappa\theta_m\nabla^2 p + \int_0^t (p - p_0)\ \exp\left(\frac{t - t'}{\theta_m}\right)\frac{dt'}{\varpi_m} = p - p_0. \tag{17}$$

Из соотношения (16) видно, что в начальные моменты времени, непосредственно следующие за резким изменением давления, насыщенная пористая среда ведёт себя как несжимаемый объект. В эти же моменты времени уравнение (17) принимает форму

$$\kappa\,\theta_m\nabla^2 p - (p - p_0) = 0, \tag{18}$$

оно относится к эллиптическому типу с бесконечной скоростью распространения возмущений ($V_0 = \infty$). При этом начальное условие должно удовлетворять уравнению (18) и новым (изменённым) граничным условиям; переход прежнего начального условия к новому будет осуществляться мгновенно (хлопком).

Как будет показано ниже, система (1), (2), (6), а следовательно, и уравнение (13) с точностью до обозначений совпадают с системой и уравнением, описывающими фильтрацию жидкости в трещиновато-пористой среде. Эта нерегулярная среда состоит из упругоёмких блоков, в которых содержится (в основном) вся жидкость, и упругоёмких трещин, по которым осуществляется (в основном) фильтрация жидкости. Обмен жидкостью пропорционален разности давлений в блоках (p_2) и трещинах (p_1). Очевидно, только трещины имеют непосредственную гидродинамическую связь с границами области фильтрации; блоки такой связи не имеют. Для описания фильтрации в трещиновато-пористых средах используется, как правило, следующая модель (модель Баренблатта) [9]:

$$\vec{w}_1 = -\frac{k_1}{\mu}\operatorname{grad} p_1, \quad \vec{w}_2 \cong 0; \tag{19}$$

$$\rho_0 \operatorname{div} \vec{w}_1 + \frac{\partial(m_1\rho)}{\partial t} - q = 0, \quad \frac{\partial(m_2\rho)}{\partial t} + q = 0; \tag{20}$$

$$\begin{gathered} m_1\rho - m_{10}\rho_0 = \rho_0\beta(p_1 - p_0), \\ m_2\rho - m_{20}\rho_0 = \rho_0\beta(p_2 - p_0); \end{gathered} \tag{21}$$

$$q = \rho_0 A(p_2 - p_1); \tag{22}$$

которая легко сводится к следующей эквивалентной системе дифференциальных уравнений:

$$p_2 = p_1 + \tau_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} - \kappa_1\tau_1\nabla^2 p_1, \tag{23}$$

$$p_1 = p_2 + \tau_2 \frac{\partial p_2}{\partial t}. \tag{24}$$

Здесь индексы “1” и “2” относятся соответственно к параметрам трещин и блоков, q характеризует обмен жидкостью между блоками и трещинами, A – коэффициент этого обмена, $\tau_{1,2} = \beta_{1,2}/A$ – постоянные размерности времени. Аналогичной системой можно описать фильтрацию в слоистом пласте, когда проницаемость одного из пропластков пренебрежимо мала по сравнению с проницаемостью другого; а также течение жидкости в пористой среде с тупиковыми порами.

Рассматривая соотношение (24) как уравнение первого порядка относительно p_2, получим

$$p_2 - p_0 = \int_0^t (p_1 - p_0)\ \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_2}\right)\frac{dt'}{\tau_2}. \qquad (25)$$

Заменив теперь в уравнении (23) p_2 с помощью равенства (25), найдём

$$\begin{gathered}\kappa_1\tau_1\nabla^2 p_1 + \int_0^t (p_1 - p_0)\ \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_2}\right)\frac{dt'}{\tau_2} = \\ = p_1 - p_0 + \tau_1\frac{\partial p_1}{\partial t}.\end{gathered} \qquad (26)$$

Очевидно, уравнения (13) и (26) с точностью до обозначений совпадают (по форме).

Для установления соответствия между коэффициентами упругоёмкостей β_1, β_2 и β, а также постоянными τ_1, τ_2 и θ_p, θ_m поступим следующим образом. Сначала сложим построчно равенства, входящие в формулы (20), в результате чего получим

$$\rho_0 \operatorname{div}\vec{w}_1 + \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = 0, \qquad (27)$$

где $m = m_1 + m_2$ и $m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\left[\beta_1(p_1 - p_0) + \beta_2(p_2 - p_0)\right]$; последнее соотношение с учётом формулы (25) запишется так

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\left[\beta_1(p_1 - p_0) + \beta_2\int_0^t (p_1 - p_0)\ \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_2}\right)\right]\frac{dt'}{\tau_2}. \qquad (28)$$

Следовательно, система (19), (27) и (28) с точностью до обозначений совпадает с системой (1), (2) и (6). Сопоставив теперь соответствующие члены в соотношениях (28) и (6) (при одинаковых p_1 и p), найдём: $\beta_1 = \beta\theta_p/\theta_m$, $\beta_2 = \beta\left(1 - \theta_p/\theta_m\right)$, $\beta_1 + \beta_2 = \beta$, $\tau_1 = \theta_m\theta_p/\left(\theta_m - \theta_p\right)$ и $\tau_2 = \theta_m$. Кроме того имеем $\kappa_1 = \kappa\theta_p/\theta_m$.

Итак, установлено полное соответствие систем (1), (2), (6) и (19) – (22), а также уравнений (13) и (26). Следовательно, фильтрации в однородной среде с реласакционным поведением количества жидкости в элементарном объёме можно сопоставить течение жидкости в трещиновато-пористой среде с упругоёмкими трещинами и блоками. Если однородная среда обладает нулевым динамическим коэффициентом упругоёмкости по сравнению со статическим, то ей в трещиновато-пористой среде будут соответствовать неупругоёмкие трещины.

5. Следует здесь особо подчеркнуть, что при фильтрации в трещиновато-пористом коллекторе основной обмен жидкостью происходит за конечное время. Поэтому для получения наибольшего извлечения нефти из таких сред необходимо эксплуатировать каждую скважину на соответствующем периодическом режиме [10]; оптимальный период (частота) такого режима каждой скважины определяется временем обмена жидкостью между блоками и трещинами в её окрестности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щелкачёв В.Н. *Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации.* Монография. В 2-х частях. – М: Нефть и газ, 1995. – Часть 1. – 586 с., часть 2. – 493 с.

2. Непримеров Н.Н. *Трехмерный анализ нефтеотдачи охлаждённых пластов.* Монография. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1978. – 215 с.

3. *Релаксационная фильтрация* / Молокович Ю.М., Непримеров Н.Н. и др. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 136 с.

4. Асторита Дж., Марручи Дж. *Основы механики неньютоновских жидкостей.* – М: Мир, 1978. – 309 с.

5. Мейз Дж. *Теория и задачи механики сплошных сред.* – М: Мир, 1974. – 319 с.

6. Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твёрдых тел.* – М: Наука, 1977. – 383 с.

7. Молокович Ю.М., Осипов П.П. *Основы теории релаксационной фильтрации.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1987. – 114 с.

8. Костерин А.В. *Об уравнении неравновесной фильтрации* // Инженерно-физический журнал. – 1980. – Т. 39. – № 1. – С. 158 –160.

9. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. *Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах* // ПММ. – 1960. – Т. 24. – Вып. 5. – С. 36–48.

10. Патент РФ № 2109130. *Способ извлечения нефти из трещиновато-пористого пласта-коллектора.*